**Энергия электростатического поля**.

Для вычисления энергии электростатического поля применяются формулы:

Эти две формулы эквивалентны, если заряд находится в конечной области пространства, а интегрирование производится по всему пространству. Это полная энергия, включающая в себя энергию взаимодействия заряженных тел и энергию, затраченную на их создание.

**Задача**. Доказать математическую эквивалентность формул

воспользовавшись теоремой Гаусса-Остроградского.

**Решение**.

Предположим, задана система зарядов с объемной плотностью . Не ограничивая общности, можно считать, что пока поверхностных зарядов нет. Предполагаем, что заряды находятся в пустоте и в конечной области пространства, тогда

Вспомним, что

Тогда

Перепишем интеграл

Первый интеграл преобразуется к виду:

Второй интеграл преобразуем по формуле Гаусса-Остроградского:

Покажем, что убывает быстрее, чем поверхность сферы. Например, для точечного заряда

Поэтому на бесконечности интеграл обращается в нуль. Итак

Поверхностную плотность считаем предельным случаем объемной. В этом случае полученный интеграл применим, и заряд можно рассматривать как сумму

Окончательно

что и требовалось доказать.

**\*\*Задача**. Найти электростатическую энергию взаимодействия точечных зарядов, затем по формуле , воспользовавшись формулой Гаусса-Остроградского, найти полную электростатическую энергию заряженных проводников. Сравните полученные формулы.

**Решение**. Работа для двух зарядов по их сближению (второй заряд находился на бесконечности)

Полагая , получим [потенциальную энергию](3_потенциал.docx#пот_энергия_зарядов) их взаимодействия

Рассмотрим для простоты три точечных заряда, а затем обобщим результат.

Обозначим и т.д. Это равенство можно записать так

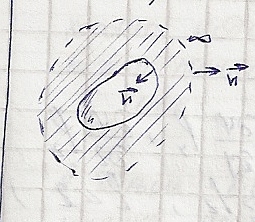
где – потенциал, создаваемый в месте точечного заряда всеми остальными зарядами. Для системы зарядов запишется аналогично

Теперь рассмотрим систему из проводников.

Интегрирование ведется по всему пространству вне проводников. Второй интеграл равен нулю, в силу того, что область интегрирования не содержит зарядов и . Первый интеграл преобразуем в поверхностный

На бесконечности , поэтому второй интеграл равен нулю. Остается

Учли, что внешняя нормаль для интегрируемой поверхности направлена внутрь проводника. На поверхности проводников , поэтому



Кроме того, на поверхности проводников: . Тогда

Видим, что формально формулы схожи, но теперь – потенциал на поверхности -го проводника, который создается и самим проводником. Это уже не только энергия взаимодействия, в нее входит также собственная энергия проводников (энергия, затраченная на их создание).

**\*\*Задача**. Найти энергию электростатического поля для следующих случаев распределения зарядов:

1. равномерно заряженная по поверхности сфера.

2. шар, равномерно заряженный по объему

3. шаровой слой с внешним и внутренним радиусами и объемным электричеством

**Решение**.

1. Сфера. Учтем, что на поверхности сферы

Воспользуемся другим представлением энергии

В сферических координатах

Учтем, что при поле .

2. Шар. Поступим аналогично. При этом воспользуемся известным результатом

Вне шара плотность заряда равна нулю, поэтому интеграл в этой области равен нулю. Интеграл легко решается и равен

Это полная энергия шара. Можно подсчитать, какая ее часть локализована вне шара. Для этого воспользуемся другим представлением энергии.

Вне шара локализовано всей его энергии.

3. Шаровой слой.

Потенциал внутри шарового слоя мы вычисляли в другой задаче (см. задачу…)

Если учесть, что , получим:

**\*\*Задача**. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что среднее значение , где – расстояние между зарядами каждой пары внутри равномерно заряженного по объему шара, равно ( – радиус шара).

**Решение**. Разобьём шар на конечное число заряженных частей, так чтобы они были малыми, но их еще можно было считать объемными телами. Тогда можно для энергии шара воспользоваться формулой

Размер частей позволяет считать их потенциалы как у точечных зарядов, но подчеркнем еще раз, это не потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов, поскольку там в каждое слагаемое не входит собственный потенциал заряда (иначе получили бы просто бесконечность при делении на ноль). Эту же энергию шара мы вычисляли в предыдущей задаче:

Пусть – некоторое среднее значение, тогда

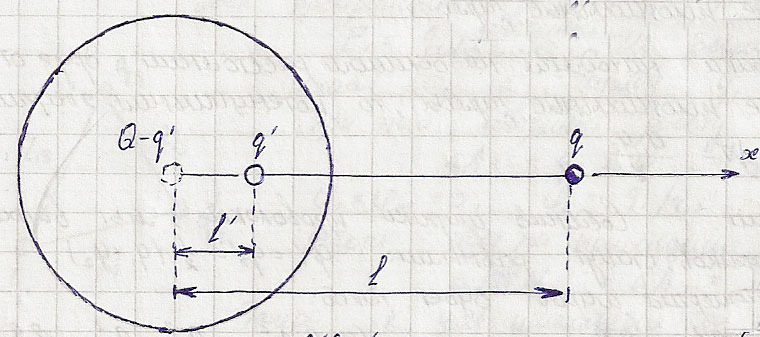
Таким образом, окончательно получается

**\*\*Задача**. Найти энергию и силу взаимодействия между точечным зарядом и металлическим шаром радиуса , расположенными на расстоянии друг от друга. Рассмотреть два случая:

1. шар заземлен

2. шар изолирован, а его полный заряд равен

**Решение**. Первая мысль, которая приходит в голову, это рассмотреть металлический шар как точечный заряд, размещенный исходя из метода электростатических изображений. В частности, для первого случая это заряд на расстоянии от центра шара. Тогда энергия взаимодействия была бы



Однако, это неверное решение, поскольку заряд шара находится в зависимости от точечного заряда. Это результат поляризации.

Будем постепенно увеличивать заряд от значения 0 до значения малыми порциями . Рассмотрим, как при этом меняется потенциальная энергия системы.

Это можно было бы записать и так: .

Полученная энергия в два раза меньше того значения, которое мы предположили ранее. При этом шар теперь обладает еще и собственной энергией, которую можно рассчитать по формуле , предварительно вычислив поверхностную плотность поляризационных зарядов.

Перепишем ее в виде

Сила взаимодействия:

Это знакомый нам результат.

Пусть теперь шар изолирован, и его заряд равен . Наши рассуждения остаются прежними. Методом электростатических отображений получаем вместо заряженной сферы два других заряда: заряд на расстоянии от центра шара и в центре шара.

Избавимся от лишних параметров

**\*\*Задача**. Два одинаковых металлических шарика находятся на большом расстоянии друг от друга. Если сообщить им разные положительные заряды, то потенциальная энергия этой системы будет равна

где – расстояние между шариками. Соединим шарики проволокой, мы выравниваем их потенциалы, а заряды у шариков станут равными . Это означает, что потенциальная энергия станет равной

или

Откуда появилась лишняя энергия?

**Решение**. Условие задачи сформулировано так, чтобы мы могли рассматривать шарики как точечные заряды, т.е. могли пренебречь поляризационными зарядами. Однако шарики помимо энергии взаимодействия обладают еще собственной энергией. Она равна

В этом случае полная энергия:

Подчеркнем, что поляризационные заряды не учитываются.

Соединив шарики проволокой, заряды выравниваются. Покажем, что это действительно так. Из равенства потенциалов следует, что

Мы написали, чему равны потенциалы на месте каждого из шаров. Отсюда следует, что или . По закону сохранения заряда . Поэтому и получили, что .

После соединения шариков, собственная энергия стала равной

Видно, что собственная энергия уменьшилась. Часть ее пошла на увеличение потенциальной энергии, но не вся.

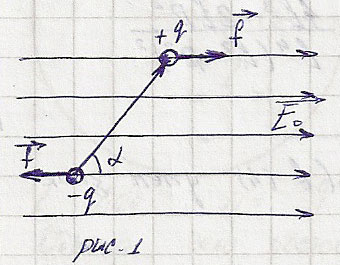
Разница ушла в тепло. А именно

**\*\*Задача**. Найти энергию поля точечного диполя в однородном внешнем поле .

**Решение**. Помимо того, что диполь обладает энергией во внешнем поле, он еще обладает собственной энергией, затраченной на его сборку, т.е. энергией взаимодействия точечных зарядов, его составляющих. Она равна

Эта энергия в данном случае нас не интересует. Будем считать ее постоянной, т.е. диполь – жестким.

Решим задачу несколькими способами.



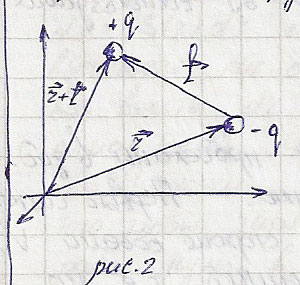
Способ 1. На диполь со стороны поля действуют силы , создающие момент

При малом повороте диполя на угол работа сил поля

Т.е. внешнее поле старается уменьшить угол . Эта же работа равна изменению потенциальной энергии диполя с обратным знаком

Откуда

При предположим тогда



Способ 2. Заряд , во внешнем поле обладает потенциальной энергией , где – потенциал внешнего поля в месте нахождения заряда . В случае диполя:

Но

Поэтому

Пояснение.

Ввиду малых значений

Поэтому и получаем, что

Способ 3. Можно внешнее поле считать полем точечного заряда , удаленного на очень большое расстояние по сравнению с размерами диполя и рассматривать этот заряд в поле точечного диполя.

Потенциал поля точечного диполя нам хорошо известен:

Потенциальная энергия в точке расположения заряда :

Поле заряда :

(радиус-вектор отсчитывается от диполя). Поэтому сразу получим

**\*\*Задача**. Решить предыдущую задачу, предположив, что диполь упругий с поляризуемостью , т.е.

**Решение**. Теперь поле не только вращает заряд, но и растягивает его. Работа поля при увеличении длины диполя:

Окончательно (индекс у диполя уберем):

Заметим, что в эту формулу по-прежнему не входит энергия взаимодействия зарядов в диполе (собственная энергия).

**Задача**. Найти энергию незаряженного проводника в однородном электростатическом поле , если его дипольный момент .

**Решение**. Рассматриваем проводник в поле бесконечно удаленного заряда (не обязательно точечного, но достаточно малого). Вблизи проводника его поле можно считать однородным, а проводник относительно заряда можно считать диполем, образовавшимся из-за индукционных зарядов под влиянием внешнего поля. Тогда [потенциал проводника](3_потенциал.docx#пот_диполя) в месте нахождения заряда :

Потенциальная энергия:

Обращаем особое внимание числовой множитель. Использовалась формула для вычисления энергии проводников, в которой не учитывалась энергия заряда в собственном поле. И поскольку – поле заряда , то энергия незаряженного проводника:

Например, для металлической сферы и